1 Principe

Pour un jeu de points de collocation équidistants, on rentrouve les stencils de dérivation à l'aide du développement de Taylor à l'ordre p:

$$f(x+a) = f(x) + \frac{a}{1!}f^{(1)}(x) + \frac{a^2}{2!}f^{(2)}(x) + \ldots + \frac{a^p}{p!}f^{(p)}(x) + O(a^p)$$

Pour $a = \pm h, \pm 2h, \ldots, \pm ph$, on obtient un système linéaire reliant les valeurs de $f(x)$ et ses dérivées successives en fonction des p valeurs de part et d'autre de x.
Le système résultant est de la forme:

$$\begin{array}{rcccccc}
f(x-ph)-f(x) & = & \frac{-ph}{1!}f^{(1)}(x) & + & \frac{(-ph)^2}{2!}f^{(2)}(x) & +\ldots+ & \frac{(-ph)^p}{p!}f^{(p)}(x) \\
\vdots & & \vdots & & & & \\
f(x-h)-f(x) & = & \frac{-h}{1!}f^{(1)}(x) & + & \frac{(-h)^2}{2!}f^{(2)}(x) & +\ldots+ & \frac{(-h)^p}{p!}f^{(p)}(x) \\
f(x+h)-f(x) & = & \frac{h}{1!}f^{(1)}(x) & + & \frac{h^2}{2!}f^{(2)}(x) & +\ldots+ & \frac{h^p}{p!}f^{(p)}(x) \\
\vdots & & \vdots & & & & \\
f(x+ph)-f(x) & = & \frac{ph}{1!}f^{(1)}(x) & + & \frac{(ph)^2}{2!}f^{(2)}(x) & +\ldots+ & \frac{(ph)^p}{p!}f^{(p)}(x)
\end{array}$$

La résolution de ce système (de $2p$ équations) permet d'obtenir les relations recherchées.
Notations: Pour la suite, on note $f_k = f(x_k)$ les valeurs aux $(2p+1)$ points de collocations (équirépartis) $x_k = x_i + k.h$, $k = 0, \pm 1, \ldots, \pm p$.

2 Stencils de dérivation à l'ordre 2

Sur 3 points, les développements de Taylor à l'ordre 2 donnent les 2 équations:

$$\begin{array}{rcl}
f_{i-1} - f_i & = & -h\, f_i^{(1)} + \frac{h^2}{2}\, f_i^{(2)} + O(h^2) \\
f_{i+1} - f_i & = & +h\, f_i^{(1)} + \frac{h^2}{2}\, f_i^{(2)} + O(h^2)
\end{array}$$

Qui donnent les stencils de dérivation suivant:

	f_{i-1}	f_i	f_{i+1}
$h\, f_i^{(1)}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$h^2\, f_i^{(2)}$	1	-2	1

3 Stencils de dérivation à l'ordre 4

Grace aux développements de Taylor à l'ordre 4, on obtient les 4 équations suivantes:

$$\begin{array}{rcccccc}
f_{i-2} - f_i & = & -2h\, f_i^{(1)} & +\frac{4h^2}{2}\, f_i^{(2)} & -\frac{8h^3}{6}\, f_i^{(3)} & +\frac{16h^4}{24}\, f_i^{(4)} & +O(h^4) \\
f_{i-1} - f_i & = & -h\, f_i^{(1)} & +\frac{h^2}{2}\, f_i^{(2)} & -\frac{h^3}{6}\, f_i^{(3)} & +\frac{h^4}{24}\, f_i^{(4)} & +O(h^4) \\
f_{i+1} - f_i & = & h\, f_i^{(1)} & +\frac{h^2}{2}\, f_i^{(2)} & +\frac{h^3}{6}\, f_i^{(3)} & +\frac{h^4}{24}\, f_i^{(4)} & +O(h^4) \\
f_{i+2} - f_i & = & 2h\, f_i^{(1)} & +\frac{4h^2}{2}\, f_i^{(2)} & +\frac{8h^3}{6}\, f_i^{(3)} & +\frac{16h^4}{24}\, f_i^{(4)} & +O(h^4)
\end{array}$$

La résolution de ce système permet d'établir les stencils suivants:

	f_{i-2}	f_{i-1}	f_i	f_{i+1}	f_{i+2}
$h\, f_i^{(1)}$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{12}$
$h^2\, f_i^{(2)}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{12}$
$h^3\, f_i^{(3)}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	-1	$\frac{1}{2}$
$h^4\, f_i^{(4)}$	1	-4	6	-4	1

4 Stencils de dérivation à l'ordre 6

Avec des développements de Taylor à l'ordre 6, on obtient les stencils:

	f_{i-3}	f_{i-2}	f_{i-1}	f_i	f_{i+1}	f_{i+2}	f_{i+3}
$h\,f_i^{(1)}$	$-\frac{1}{60}$	$\frac{3}{20}$	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{20}$	$\frac{1}{60}$
$h^2\,f_i^{(2)}$	$\frac{1}{90}$	$-\frac{3}{20}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{49}{18}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{20}$	$\frac{1}{90}$
$h^3\,f_i^{(3)}$	$\frac{1}{8}$	-1	$\frac{13}{8}$	0	$-\frac{13}{8}$	1	$-\frac{1}{8}$
$h^4\,f_i^{(4)}$	$-\frac{1}{6}$	2	$-\frac{13}{2}$	$\frac{28}{3}$	$-\frac{13}{2}$	2	$-\frac{1}{6}$
$h^5\,f_i^{(5)}$	$-\frac{1}{2}$	2	$-\frac{5}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	-2	$\frac{1}{2}$
$h^6\,f_i^{(6)}$	1	-6	15	-20	15	-6	1

5 Stencils de dérivation à l'ordre 8

Pour des développements de Taylor à l'ordre 8, on obtient les stencils:

	f_{i-4}	f_{i-3}	f_{i-2}	f_{i-1}	f_i	f_{i+1}	f_{i+2}	f_{i+3}	f_{i+4}
$h\,f_i^{(1)}$	$\frac{1}{280}$	$-\frac{4}{105}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{4}{5}$	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{105}$	$-\frac{1}{280}$
$h^2\,f_i^{(2)}$	$-\frac{1}{560}$	$\frac{8}{315}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}$	$-\frac{205}{72}$	$\frac{8}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{315}$	$-\frac{1}{560}$
$h^3\,f_i^{(3)}$	$-\frac{7}{240}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{169}{120}$	$\frac{61}{30}$	0	$-\frac{61}{30}$	$\frac{169}{120}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{7}{240}$
$h^4\,f_i^{(4)}$	$\frac{7}{240}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{169}{60}$	$-\frac{122}{15}$	$\frac{91}{8}$	$-\frac{122}{15}$	$\frac{169}{60}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{7}{240}$
$h^5\,f_i^{(5)}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{13}{3}$	$-\frac{29}{6}$	0	$\frac{29}{6}$	$-\frac{13}{3}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{6}$
$h^6\,f_i^{(6)}$	$-\frac{1}{4}$	3	-13	29	$-\frac{75}{2}$	29	-13	3	$-\frac{1}{4}$
$h^7\,f_i^{(7)}$	$-\frac{1}{2}$	3	-7	7	0	-7	7	-3	$\frac{1}{2}$
$h^8\,f_i^{(8)}$	1	-8	28	-56	70	-56	28	-8	1